# 12 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

*Физика в наше время слишком важна*, *чтобы оставлять ее физикам*.

Давид ГИЛЬБЕРТ

В Главах 3 и 4 мы рассмотрели математические модели колебательных процессов. При этом исследуемый объект (маятник, пружина, электрический контур) понимался как материальная точка, т.е. не имел пространственных размеров. Однако с колебаниями могут быть связаны и протяженные объекты. В частности, естественными обобщениями выше указанных процессов служат механические колебания струны и электрические колебания провода. Периодически меняющиеся характеристики этих процессов зависят уже не только от времени, но и от пространственной координаты, направленной вдоль струны или провода. Двумерными аналогами этих процессов являются колебания мембраны или распространение волн на поверхности воды. Наконец, звуковые и электромагнитные волны распространяются в пространстве. Краткий обзор математических моделей выше указанных процессов и методов их анализа является предметом настоящей лекции.

Основным объектом исследование здесь оказывается уравнение колебания струны[[1]](#endnote-1), являющейся распределенным аналогом уравнения колебания пружины. Подобно уравнению теплопроводности, оно представляет собой уравнение в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными. Вывод уравнения осуществляется на основе закона сохранения импульса.

Математическая модель рассматриваемого процесса представляет собой краевую задачу для получаемого уравнения. Решение двух таких задач описывается в данной главе. В частности, с помощью метода разделения переменных, описанной ранее при анализе процессов переноса, исследуется математическая модель поперечных колебаний струны с закрепленными концами. При этом решение задачи получается в виде ряда Фурье. Анализ бесконечно длинной струны осуществляется с помощью метода Д'Аламбера, связанного с приведением уравнения к каноническому виду с последующем нахождением его аналитического решения. В качестве приложения исследуется распространение бегущих волн.

Заключительный раздел лекции посвящен электрическим колебаниям в проводе. Математическая модель этого процесса характеризуется системой телеграфных уравнений[[2]](#endnote-2), откуда при определенных условий следуют уравнения относительно напряжения в цепи и электрического тока, совпадающие по форме с уравнением колебания струны.

В Приложении устанавливается закон сохранения энергии для колеблющейся струны. Приводятся общее волновое уравнение, охватывающее также процесс колебания мембраны и распространение звуковых волн. Колебания упругой балки описывается уравнением в частных производных четвертого порядка. Рассматриваются также уравнения Максвелла, составляющие важнейшую математическую модель электродинамики. В заключении приводится метод конечных разностей для приближенного решения уравнения колебания струны.

### **ЛЕКЦИЯ**

#### **1. Уравнение колебания струны**

Естественным обобщением колебания пружины (см. Глава 3) служит процесс колебания ***струны*** – объекта, обладающего некоторыми размерами. Предположим, что струна является достаточно длинной и тонкой. Тогда ее можно считать пространственно одномерной и учитывать изменение всех характеристик лишь по длине струны. При этом независимыми переменными будут время *t* и пространственная переменная *х*, направленная вдоль струны. Таким образом, в отличие от пружины или маятника струну уже нельзя квалифицировать как материальную точку, а ее математическая модель не может быть сведена к системе конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений. Как и в случае нагреваемого тела или диффундирующего газа речь идет о распределенном объекте.

Мы ограничимся рассмотрением лишь ***поперечных колебаний струны***[[3]](#endnote-3), которые направлены перпендикулярно оси *х*. Функцией состояния системы здесь будет отклонение *u* струны от оси *х*. Система координат выбирается таким образом, чтобы в том случае, когда струна находится непосредственно на оси *х* (т.е. при *u=*0) и покоится, колебания не возникают. Тем самым нулевое значение функции состояния системы соответствует положению равновесия. Таким образом, величина *u*(*x*,*t*) выражает отклонение струны в точке *х* в момент времени *t* от положения равновесия, см. Рис. 12.1.



Рис. 12.1. Поперечные колебания струны.

Уравнение движения струны подобно уравнению движения материальной точки выводится на основе закона сохранения импульса[[4]](#endnote-4). Импульс тела массой *m*, движущегося со скоростью *v* равен произведению *р* = *mv*. Масса однородной струны длиной Δ*x* определяется по формуле *m* = *ρ*Δ*x*, где *ρ* – линейная плотность, т.е. количество вещества, приходящееся на единицу длины[[5]](#endnote-5). Плотность определяется материалом, из которого состоит струна, и является параметром задачи. Итак, импульс струны равен *p*=*ρv*Δ*x*. Здесь величина *v* представляет собой скорость изменения функции состояния *u*, т.е. частную производную по времени. Эту производную здесь, как и в предшествующих лекция, для краткости мы обозначаем через *ut*. Тем самым мы получаем формулу *p* = *ρut*Δ*x*. В этой формуле скорость (а для неоднородной струны – и плотность) считается постоянной на рассматриваемом участке струны. В действительности же, функция *u*, а значит, и ее производная по времени (а в случае неоднородной струны – и ее плотность) меняются от точки к точке. Пренебречь таким изменением можно лишь на участке сколь угодно малой длины *dx*. Значение импульса здесь равно

*dp* = *ρutdx*.

Рассмотрим некоторый протяженный участок струны от точки *х* до *x*+Δ*x*. Соответствующий импульс находится в результате интегрирования последнего соотношения



Однако для вывода уравнения состояния нас интересует не само значение импульса на данном участке, а его изменение на некотором интервале времени от *t* до *t*+Δ*t*. Тогда искомое изменение импульса равно

 (12.1)

Мы установили, как меняется импульса на заданном участке струны за указанное время. Теперь предстоит выяснить, за счет чего этот импульс изменился. Если на тело действует постоянная сила *F*, то за время Δ*t* она сообщает ему импульс *p* = *F*Δ*t*. В случае переменной силы это равенство имеет смысл лишь на бесконечно малом интервале времени *dt*. Ему соответствует значение импульса

*dp* = *Fdt*.

Тогда за время от *t* до *t* **+**Δ*t* получаем импульс



Для уточнения этого равенства необходимо определить смысл входящей в него силы *F*. Будем полагать, что единственная действующая на струну сила обусловлена ее натяжением. Предположим, что струна является достаточно гибкой, т.е. не сопротивляется изгибу[[6]](#endnote-6). Тогда сила ее натяжения (или просто, ***натяжение***) *k* направлена по касательной к профилю струны, см. Рис. 12.1. Натяжение определяется материалом, переменно в случае неоднородной струны и является параметром системы.

Поскольку мы учитываем лишь поперечные колебания струны, в выражение для импульса должно войти не само натяжение, а его проекция на ось *u*. В результате получаем равенство *F* = *k*sin*α*, где *α* – угол наклона касательной к профилю струны в данной точке. Мы ограничимся рассмотрением лишь малых колебаний струны[[7]](#endnote-7). Синус малого угла достаточно близок к его тангенсу. Однако, тангенс угла наклона касательной к кривой, характеризующей зависимость функции *u* от аргумента *х*, равен ее производной по этому аргументу *ux* = ∂*u*/∂*х*. В результате с достаточно большой точностью выполняется равенство *F* = *k*tg*α* = *kux*.

Нас интересует изменение импульса на отрезке [*x*,*x*+Δ*x*] под действием сил натяжения. Тогда искомая сила *F* равна разности сил на концах рассматриваемого участка (см. Рис. 12.2). Таким образом, находим значение силы



Следовательно, изменение импульса рассматриваемого участка струны на данном интервале времени равно

 (12.2)



Рис. 11.2. Действие сил натяжения на отрезке.

Мы полагаем, что импульс системы меняется исключительно под действием сил натяжения[[8]](#endnote-8). В результате получаем закон сохранения импульса *p*1 = *p*2. Тогда, пользуясь условиями (12.1), (12.2), будем иметь



Полученное выражение преобразуется в соответствии с теоремой о среднем, подобно тому, как это делалось в предшествующих лекциях. Имеем



где *ξ*∈[*x*,*x*+Δ*x*],*τ*∈[*t*,*t*+Δ*t*]. После деления на произведение Δ*x*Δ*t* будем иметь



Переходя к пределу при Δ*t*→0, Δ*x*→0, получаем выражение

 (12.3)

называемое ***уравнением колебания струны***[[9]](#endnote-9). Если струна является однородной, т.е. ее характеристики постоянны, то соотношение (12.3) принимает вид

*utt* = *a*2*uxx*, (12.4)

где 

Уравнения колебания струны и теплопроводности не только описывают разные процессы, но и относятся к разным типам[[10]](#endnote-10). Тем не менее, процедура их вывода в значительной степени совпадает, см. Таблица 12.1. Сначала вычисляется изменение некой величины (импульса, количество тепла) некоторого участка однородного объекта (струны, тела) на каком-то интервале времени, см. шаг 1. Затем та же величина определяется на участке сколь угодно малой длины, см. шаг 2. Далее она же находится на протяженном участке неоднородного объекта, шаг 3. На четвертом шаге вычисляется рассматриваемая величина (импульс, количество тепла) на некотором интервале времени под действие постоянной конкретного воздействия (силы, теплового потока). Затем она же определяется на сколь угодно малом интервале времени (шаг 5) и на протяженном интервале времени в случае переменного воздействия (шаг 6). На седьмом шаге находится изменение данной величины на некотором участке рассматриваемого объекта под действием указанного воздействия (шаг 7). Далее применяется соответствующий закон сохранения (шаг 8), теорема о среднем (шаг 9), и в результате перехода к пределу получается уравнение состояния системы (шаг 10).

Таблица 12.1. Схема вывода уравнений теплопроводности и колебания струны.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **шаг** | **колебания струны** | **перенос тепла** |
| 1 | Δ*x* |  |
| 2 | *dx* |  |
| 3 |  |  |
| 4 | *p = F*Δ*t* | *Q = q*Δ*t* |
| 5 | *dp = Fdt* | *dQ = qdt* |
| 6 |  |  |
| 7 |  |  |
| 8 | *p*1 = *p*2 | *Q*1 = *Q*2 |
| 9 |  |  |
| 10 |  |  |

Полученные соотношения, подобно уравнению теплопроводности представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных. Для получения полной математической модели необходимо задать соответствующие начальные и граничные условия.

Уравнение колебания струны имеет второй порядок по времени и требует задания двух начальных условий. Будем полагать, что в начальный момент времени *t* = 0 известны начальный профиль струны, характеризуемый функцией *ϕ*=*ϕ*(*x*), и распределение скорости *ψ*=*ψ*(*x*) по ее длине[[11]](#endnote-11). Таким образом, справедливы равенства

*u*(*x*,0) = *ϕ*(*x*), *ut*(*x*,0) = *ψ*(*x*). (12.5)

Исследуемое уравнение имеет второй порядок и по пространственной переменной. В этой связи должны быть заданы два дополнительных условия на концах струны, т.е. граничные условия. Рассмотрим струну длины *L*, причем ее левый конец соответствует точке *х*=0, а правый – точке *х*=*L*. На левом конце может быть задано условие первого рода

*u*(0,*t*) = *α*1(*t*),

согласно которому левый конец струны движется по известному закону *α*1=*α*1(*t*). В частности, при *α*1=0 он жестко закреплен в положении равновесия. Возможно также условие второго рода

*kux*(0,*t*) = *β*1(*t*),

в соответствии с которым на левом конце задана сила натяжения *β*1. При *β*1=0 натяжение отсутствует, т.е. конец является свободным.

Встречаются и другие типы граничных условий. Однако важнейшими являются приведенные выше. Аналогичные условия могут быть заданы и в точке *х*=*L*. В зависимости от характера исследуемого явления возможны различные сочетания условий на концах струны. В простейших случаях рассматриваются оба условия первого рода   
(известны законы движения концов струны)

*U*(0,*t*) = *α*1(*t*), *u*(*L*,*t*) = *α*2(*t*), (12.6)

либо оба условия второго рода (известны силы, действующие на концах)

*kux*(0,*t*) = *β*1(*t*), *kux*(*L*,*t*) = *β*2(*t*). (12.7)

Уравнение колебания струны с начальными условиями (12.5) и граничными условиями (12.6) составляют ***первую краевую задачу*** для исследуемого уравнения. При замене соотношений (12.6) на (12.7) получаем ***вторую краевую задачу***. Обе эти задачи в общем случае считаются неоднородными. Если выражения в правых частях граничных условий равны нулю, то получаем однородные краевые задачи. При этом граничные   
условия

*u*(0,*t*) = 0, *u*(*L*,*t*) = 0 (12.8)

соответствуют закрепленным концам струны, а соотношения

*ux*(0,*t*) = 0, *ux*(*L*,*t*) = 0 (12.9)

свободным концам струны.

Особая задача возникает в том случае, когда струна является столь длинной, что ее можно считать бесконечной. Тогда граница области вообще отсутствует и не совсем ясно, где следует задавать дополнительные условия по пространственной переменной. Однако оказывается, что в этом случае граничные условия вообще не нужны. Уравнение колебания бесконечной струны с начальными условиями (12.5) составляют ***задачу Коши*** для данного уравнения.

***Колебания струны описываются уравнением в частных производных.***

#### **2. Колебание струны с закрепленными концами**

Рассмотрим колебания однородной струны длиной *L* с закрепленными концами при известном начальном профиле струны и распределении ее скорости. Математической моделью исследуемого процесса является однородная первая краевая задача (12.4), (12.5), (12.8). Для ее решения воспользуемся методом разделения переменных[[12]](#endnote-12), рассмотренный при исследовании уравнения теплопроводности, см. Глава 10.

Решение задачи будем искать в виде

*u*(*x*,*t*) = *X*(*x*)*T*(*t*). (12.10)

Подставляя это выражение в равенство (12.4), будем иметь

*X*(*x*)*T*"(*t*) = *a*2*X*"(*x*)*T*(*t*).

Отсюда следует равенство



Равенство функций различных аргументов возможно исключительно в том случае, когда выражения, входящие в его левую и правую часть, являются константами. Обозначая соответствующую константу через *λ*, приходим к двум равенствам

 (12.11)

 (12.12)

Таким образом, получаются обыкновенных дифференциальных уравнения, связанные общей константой *λ*. Подставляя функцию *u* из равенства (12.10) в граничные условия (12.8), приходим к соотношениям

*X*(0)*T*(*t*) = 0, *X*(*L*)*T*(*t*) = 0, *t* >0.

Учитывая, что тождественное равенство нулю функции *T* в силу (12.10) приведет к тому, что и решение рассматриваемой задачи будет тождественно равно нулю. А это противоречит начальным условия. В результате заключаем

*X*(0) = 0, *X*(*L*) = 0. (12.13)

Соотношения (12.12), (12.13) в точностью совпадает с задачей Штурма–Лиувилля, рассмотренной при исследовании уравнения теплопроводности, см. Глава 10. Она имеет нетривиальное решение исключительно при , где

.

Соответствующие решения задачи (12.12), (12.13) имеют вид



где константы *ck* произвольны. Общее решение уравнения (12.11) при  определяется по формуле



где *ak* и *bk* – произвольные постоянные. В результате определяем функцию



где  Для любых значений номера *k* и констант *ϕk* и *ψk* функция *uk* удовлетворяет уравнению колебания струны (12.4) и граничным условиям (12.8). Аналогичными свойствами обладает и сумма всех таких решений[[13]](#endnote-13)

 (12.14)

представляющая собой ряд Фурье. Остается подобрать входящие в него константы *ϕk* и *ψk* так, чтобы обеспечить выполнение начальных условий (12.5).

Полагая в равенстве (12.14) *t=*0 и пользуясь первым равенством (12.5), получаем



Умножим это равенство на функцию  для произвольного номера *n* и проинтегрируем результат по *x* от 0 до *L*. Получаем



Входящие в левую часть этого выражения интегралы вычислялись в процессе анализа уравнения теплопроводности, см. Глава 10. В результате находим коэффициенты Фурье

 (12.15)

Аналогично, дифференцируя равенство (12.10) по времени, полагая *t=*0 и пользуясь вторым равенством (12.5), установим



Повторяя предшествующие рассуждения, находим коэффициенты

 (12.16)

Итак, решение задачи (12.4), (12.5), (12.8) определяется по формуле (12.14), где числа *ϕk* и *ψk* вычисляются по формулам (12.15) и (12.16).

Рассмотрим частный случай решаемой задачи. Пусть параметры системы определяются следующим образом:

*L = π*, *ϕ*(*x*) = sin*x*, *ψ*(*x*) = 0.

Таким образом, рассматривается струна указанной длины, закрепленная на концах, которая в начальный момент времени имеет синусоидальный профиль и нулевую скорость. Согласно формулам (12.15) и (12.16) все коэффициенты Фурье функции *ϕ*, начиная со второго и все параметры *ψk* равны нулю, а значение *ϕ*1 равно единице. Тогда решение рассматриваемой задачи равно

*u*(*x*,*t*) = cos*at* sin*x*.

Подставляя это значение в соотношения (12.4), (12.5), (12.8), убеждаемся, что определенная таким образом функция *u* действительно является решением задачи.

На Рис. 12.3 изображены профили струны, а также распределение по длине ее скорости

*v*(*x*,*t*) = *ut*(*x*,*t*) = -*a* sin*at* sin*x*.

в различные моменты времени. Графики этих функций приводятся с шагом по времени *t*=¼*π*/*a*.

Проанализируем полученные результаты. Мы рассматриваем свободные колебания струны. Концы струны жестко закреплены. В начальный момент времени струна выведена из положения равновесия и покоится. Вследствие этого на струну действует сила натяжения, направленная в сторону положения равновесия. Струна начинается двигаться в этом направлении, набирая скорость. В момент времени *t=π*/2*a* она достигает равновесия, набирая при этом максимальную скорость. Далее она продолжает движение по инерции, т.е. отклоняется от равновесия в противоположную сторону. По мере отклонения струны от равновесия возрастает сила натяжения, направленная против движения, а значит, тормозящая струну. В момент времени *t=π*/*a* струна останавливается. В это время она максимально отклонена от равновесного состояния. В виду натяжения струны она вновь начинает двигаться в сторону равновесия, набирая скорость. При *t=*3*π*/2*a* она приходит в равновесное состояние и, продолжая движение, в момент времени *t=*2*π*/*a* приходит в то же состояние, в котором она была изначально. Далее процесс возобновляется[[14]](#endnote-14). При этом параметр *а* определяет частоту колебания струны.

Аналогичным образом может быть исследован процесс колебания струны со свободными концами[[15]](#endnote-15). Для исследования вынужденных колебаний струны и неоднородной краевой можно воспользоваться теми же методами, что и при исследовании соответствующих задач для уравнения теплопроводности[[16]](#endnote-16).

**Задание 12.1. Первая краевая задача для уравнения колебания струны**. Рассматривается уравнение*ρutt* = *kuxx* на единичном отрезке с однородными граничными условиями и начальными условиями *u*(*x*,0)=0 и *ut*(*x*,0)=sin3*πx*. Провести следующий анализ.

1. Дать физическую интерпретацию постановки задачи.

2. С помощью метода разделения переменных найти решение краевой задачи.

3. Подставив найденное решение в уравнение и краевые условия, убедиться в том, что это действительно решение задачи.

4. Дать физическую интерпретацию полученных результатов.

5. Установить влияние плотности и натяжения струны на результаты.



Рис. 12.3. Положение струны и ее скорость в различные моменты времени.

***Решение первой краевой задачи для уравнения колебания струны  
в соответствии с методом разделения переменных получается в виде ряда Фурье.***

#### **3. Бесконечно длинная струна**

Движение однородной струны бесконечной длины описывается уравнением

*utt* = *a*2*uxx*, (12.17)

с начальными условиями

*u*(*x*,0) = *ϕ*(*x*), *ut*(*x*,0) = *ψ*(*x*), (12.18)

где параметр *а*, начальный профиль струны *ϕ* и начальная скорость *ψ* считаются известными.

Для решения исследуемой задачи Коши перейдем от естественных независимых переменных *х*, *t* к новым переменным

*ξ* = *ξ*(*x*,*t*) = *x*+*at*, *η* = *η*(*x*,*t*) = *x*–*at*.

которые называются ***характеристическими***. Запишем уравнение колебания струны в характеристических переменных. Введем новую функцию состояния *v* так, что

*u*(*x*,*t*) = *v*(*ξ*(*x*,*t*),*η* (*x*,*t*)).

Найдем производные[[17]](#endnote-17)

*ux* = *vx* = *vξξx* + *vηηx* = *vξ* + *vη*,

*ut* = *vt* = *vξξt* + *vηηt* = *a*(*vξ* – *vη*).

Определим вторую производную

*uxx* = (*ux*)*x* = (*vξ* + *vη*)*x* = *vξξξx* + *vξηηx* + *vηξξx* + *vηηηx*,

Учитывая равенство смешанных производных *vξη*и *vηξ*, будем иметь

*uxx* = *vξξ* + 2*vξη* + *vηη*,

Аналогичным образом определяется вторая производная

*utt* = (*ut*)*t* = *a*2(*vξξξt* + *vξηηt* – *vηξξt* – *vηηηt*).

Подставляя значения вторых производных в соотношение (12.17), получаем

*a*2(*vξξ* + 2*vξη* + *vηη*) = *a*2(*vξξ* – 2*vξη* + *vηη*).

Таким образом, справедливо равенство

*vξη*= 0, (12.19)

которое соответствует ***каноническому виду*** уравнения колебания струны.

Равенство



означает, что выражение в круглых скобках не зависит от переменной *ξ*. Однако оно может оказаться функцией другой переменной *η*. Таким образом, в результате интегрирования соотношения (12.19) по переменной *ξ* установим справедливость равенства *vη*(*ξ*,*η*) = *f*(*η*) для любой функции *f*.

Проинтегрируем полученное выражение по переменной *η*. В результате будем иметь

****

Здесь величина *f*1 не зависит от *η*, но может оказаться функцией переменной *ξ*. Вводя обозначение

****

определим функцию

*v*(*ξ*,*η*) = *f*1(*ξ*) + *f*2(*η*). (12.20)

Итак, решение уравнения (12.9) определяется с точностью до двух произвольных функций[[18]](#endnote-18). Функция *v*, определенная по формуле (12.20), называется ***общим решением*** уравнения (12.19). Тогда общее решение уравнения (12.17) определяется по формуле[[19]](#endnote-19)

*u*(*x*,*t*) = *f*1(*x*+*at*) + *f*2(*x*–*at*). (12.21)

Нас интересует, однако, частное решение уравнения колебания струны, удовлетворяющее начальным условиям. Подберем входящие в формулу (12.21) функции *f*1 и *f*2 таким образом, чтобы обеспечить справедливость соотношений (12.18). Получаем равенства

*f*1(*x*) + *f*2(*x*) = *ϕ*(*x*), (12.22)

**** (12.23)

где– производные соответствующих функций одной переменной.

Проинтегрируем равенство (12.23) от некоторого фиксированного *x*0 до произвольного значения *х*. Получаем соотношение

 (12.24)

где *с* – произвольная постоянная.

Соотношения (12.22), (12.24) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных *f*1(*х*) и *f*2(*х*). Решая эту систему, находим значения





Отметим, что искомые функции *f*1 и *f*2 определяются с точностью до двух постоянных *x*0 и *с*, что предвещает определенные неприятности.

Подставим найденные значения функций в равенство (12.21). Получаем



Отрадным здесь оказывается тот факт, что неопределенные параметры *x*0 и *с* в процессе преобразований сократились. Таким образом, мы находим единственное решение задачи Коши (12.17), (12.18)



Полученное соотношение называется ***формулой Д'Аламбера***, а использованный метод решения задачи – ***методом*** ***Д'Аламбера***.

Рассмотрим частный случай задачи (12.17), (12.18). Предположим, что в начальный момент времени струна имеет профиль *ϕ* = *ϕ*(*x*), изображенный на Рис. 12.4, и покоится, т.е. имеет нулевую начальную скорость. Тогда в соответствии с формулой Д'Аламбера решение задачи будет иметь вид



Таким образом, положение струны в момент времени *t* складывается из величин, определяемых двумя слагаемыми в правой части последнего равенства. Первой из них соответствует функция *ϕ*, сдвинутая влево по оси абсцисс на величину *at* и сжатую вдвое по оси ординат. Второе слагаемое отличается от первого лишь направлением сдвига.

На Рис. 12.5 изображаются профили струны в разные моменты времени с шагом *а*/4. Как видно из графиков, положение струны определяется суперпозицией двух полуволн, которые постепенно разбегаются в разные стороны. Наблюдаемое явление называется ***бегущей волной***[[20]](#endnote-20). Отметим, что чем больше значение параметра *а*, тем быстрее распространяется фронт волны. Как видно из уравнения (12.17) коэффициент *а* действительно имеет размерность скорости. Его называют скоростью бегущей волны.

**Задание 12.2. Бегущие волны**. Рассматривается уравнение*ρutt* = *kuxx* в неограниченной области с начальным распределением, представленным на Рис. 12.6 и нулевой начальной скоростью. Провести следующие действия.

1. Пользуясь формулой Д'Аламбера, найти решение задачи.

2. Нарисовать графики положения струны в разные моменты времени так, чтобы оценить весь ход исследуемого процесса.

3. Установить влияние плотности и натяжения струны на результаты.



Рис. 12.4. Начальный профиль струны.



Рис. 12.5. Профили струны в разные моменты времени. Волны распространяются со скоростью *а*.



Рис. 12.6. Начальный профиль струны для Задания 12.2.

***Аналитическое решение задачи Коши для уравнения колебания струны  
устанавливается методом Д’Аламбера.  
Формула Д’Аламбера описывает бегущие волны.***

#### **4. Электрические колебания в проводах**

Уравнение колебания струны является распределенным аналогом уравнения колебания пружины, а колебательный контур можно интерпретировать как электрический аналог пружины, см. Глава 4. Существует электрический аналог струны, являющийся также распределенным аналогом контура (см. Рис. 12.7). Таковым является тонкий длинный провод. При течении тока по проводу меняются напряжение *V* и сила тока *I*, которые зависят от времени *t* и от пространственной координаты *х*, направленной вдоль провода. Считается, что провод обладает индуктивностью, емкостью и сопротивлением. Кроме того, некоторое количество энергии теряется из-за несовершенства изоляции провода. Установим уравнение состояния системы на основе соотношений, выражающих баланс напряжений и зарядов на участке провода.



Рис. 12.7. Аналогия пружины, струны, контура и провода.

Падение напряжения на некотором участке провода складывается из напряжений *V*1 на индуктивности и *V*2 на сопротивлении. Напряжение на индуктивности пропорционально скорости изменения силы тока, т.е. ее производной по времени. Отметим, однако, что поскольку объект исследования является распределенным, параметром процесса оказывается не собственно индуктивность провода (подобно индуктивности катушки контура), а индуктивность *l* единицы длины провода. Если сила тока не меняется по длине провода, то напряжение на индуктивности для провода длиной Δ*x* будет равно *V*1=*lIt*Δ*x*. Если же сила тока зависит от переменной *х*, то это равенство остается в силе лишь на участке сколь угодно малой длины *dx*, т.е. *dV*1=*lItdx*. При рассмотрении участка провода [*x*,*x*+Δ*x*] получаем напряжение



Напряжение на сопротивлении определяется в соответствии с законом Ома, согласно которому напряжение пропорционально силе тока, *V*2=*RI*, где *R* – электрическое сопротивление. При рассмотрении протяженного объекта (провода) параметром процесса будет не сама величина *R*, а сопротивление единицы длины *r*. Тогда в случае постоянства силы тока напряжение на сопротивлении для провода длиной Δ*x* равно   
*V*2=*rI*Δ*x*. В случае переменной силы тока получаем соотношение *dV*2=*rIdx*. Тогда напряжение на сопротивлении для участка [*x*,*x*+Δ*x*] определяется по формуле



Падение напряжения на рассматриваемом участке провода представляет собой разность между напряжениями в точках *х* и *x*+Δ*x* (см. Рис. 12.8). Следовательно, баланс напряжений на участке провода [*x*,*x*+Δ*x*] характеризуется соотношением



Пользуясь теоремой о среднем, будем иметь



где *ξ*∈[*x*,*x*+Δ*x*]. Переходя к пределу при Δ*x*→0, получаем уравнение

*Vx*(*x*,*t*)+ *lIt*(*x*,*t*) + *rI*(*x*,*t*) = 0. (12.25)



Рис. 12.8. Участок провода с индуктивностью и сопротивлением.

Установим теперь изменение заряда на участке [*x*,*x*+Δ*x*] за время от *t* до *t*+Δ*t*. Заряд провода за время Δ*t* при условии постоянства силы тока равен *q*=-*I*Δ*t*. В случае переменной силы тока это равенство выполнено лишь на сколь угодно малом интервале времени *dt*, т.е. *dq* = -*Idt*. Тогда за время от *t* до *t*+Δ*t* получаем заряд



Следовательно, изменение заряда на участке [*x*,*x*+Δ*x*] на данном интервале времени равно



Заряд провода меняется в силу того, что он обладает некоторой электрической емкостью, а также за счет утечки из-за несовершенства изоляции провода. Как известно, заряд в цепи пропорционален напряжению *q*=*CV*. Если напряжение не меняется, то заряд провода длиной Δ*x* равен *q*=*cV*Δ*x*, где *c* – емкость единицы длины провода. В случае переменного напряжения эта формула остается в силе лишь при рассмотрении участка сколь угодно малой длины *dq*=*cVdх*. Тогда заряд участка провода [*x*,*x*+Δ*x*] равен интегралу



Таким образом, на подзарядку рассматриваемой части провода за время от *t* до *t*+Δ*t* затрачивается следующее количество электричества



Потеря заряда в единицу времени из-за его утечки через изоляцию пропорциональна напряжению *q*=*GV*, где *G* – коэффициент утечки. Если напряжение постоянно, то за время Δ*t* на участке длиной Δ*x* теряется заряд *q*=*gV*Δ*x*Δ*t*, где *g* – коэффициент утечки единицы длины провода. В случае переменного напряжения получаем равенство *dq*=*gVdxdt*, Таким образом, потеря заряда за счет утечки на данном участке провода на рассматриваемом интервале времени равна



Согласно закону сохранения заряда, последний меняется за счет подзарядки провода и утечки, т.е. справедливо равенство

*q*1 = *q*2 + *q*3.

В результате установим соотношение



Применяя теорему о среднем, получаем равенство



где *ξ*,*η*∈[*x*,*x*+Δ*x*]; *τ*,*θ*∈[*t*,*t*+Δ*t*]. Переходя к пределу при Δ*x*→0, Δ*t* →0, имеем

*Ix*(*x*,*t*) + *cVt*(*x*,*t*) + *gV*(*x*,*t*) = 0. (12.26)

Соотношения (12.25), (12.26) лежат в основе математической модели исследуемого процесса и называются ***телеграфными уравнениями***[[21]](#endnote-21).

Установим отдельные уравнения относительно напряжения и силы тока. Продифференцируем равенство (12.25) по *х*, а (12.26) по *t*. Получаем равенства

*Vxx* + *lItx* + *rIx* = 0,

*Ixt* + *cVtt* + *gVt* = 0.

Вычитая из первого соотношения второе, умноженное на *l*, будем иметь

*Vxx* + *rIx* – *lcVtt* – *lgVt* = 0,

Подставляя сюда значение *Ix* из равенства (12.26), установим уравнение в частных производных второго порядка относительно напряжения

*Vtt* = *a*2*Vxx* – *bVt* – *kV*,

где



Аналогичным образом получаются уравнения относительно силы тока

*Itt* = *a*2*Ixx* – *bIt* – *kI*,

Если пренебречь потерей заряда через изоляцию и сопротивлением провода, то *r*=0, *g*=0. Тогда *b*=0, *k*=0, а полученные уравнения принимают вид

*Vtt* = *a*2*Vxx*, (12.27)

*Itt* = *a*2*Ixx*. (12.28)

Соотношения (12.27), (12.28) с точностью до обозначений совпадают с уравнением колебания струны. Уравнения колебания напряжения и тока в проводах и являются распределенными аналогами уравнения колебательного контура подобно тому, как уравнение колебания струны служить естественным обобщением уравнения колебания пружины на случай распределенного объекта.

Для полученных уравнений могут быть поставлены различные краевые задачи, подобные тем, что исследовались при изучении процесс колебания струны.

Сравнительная характеристика сосредоточенной (контур) и распределенной (провод) электрических моделей приводится в Таблице 12.2. При этом не учитывается утечка заряда через изоляцию провода.

Таблица 12.2. Сравнение сосредоточенной и распределенной электрических моделей.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **характеристика** | **контур** | **провод** |
| напряжение  на индуктивности |  |  |
| напряжение  на сопротивлении | *V*2 *= RI* |  |
| баланс напряжений | *V*1 + *V*2 = *V* | *V*1 + *V*2 = *V*(*x*,*t*) – *V*(*x*+Δ*x*,*t*) |
| первое уравнение |  | *lIt* + *rI* = –*Vx* |
| заряд |  |  |
| заряд  на конденсаторе | *q*2 = *CV* |  |
| баланс зарядов | *q*1 = *q*2 | *q*1 = *q*2 |
| второе уравнение |  | *cVt*  = -*Ix* |
| уравнение колебаний |  |  |

***Электрические колебания в проводе описывается телеграфными уравнениями.  
Из телеграфных уравнений выводятся уравнения относительно напряжения и силы тока,  
совпадающие по форме с уравнением колебания струны.***

**Направление дальнейшей работы**. Рассмотрев процессы переноса и волновые процессы, мы переходим к третьему классу систем с распределенными параметрами. Речь идет о стационарных системах, описываемых уравнениями эллиптического типа и имеющих многочисленные приложения.

### **ПРИЛОЖЕНИЕ**

При исследовании колебания маятника было установлено, что в процессе движения его кинетическая и потенциальная энергия со временем меняются периодически, однако их сумма остается постоянной. Ниже будет установлен закон сохранения энергии для процесса колебания струны. Кроме того, приводится волновое уравнение, являющееся многомерным аналогом уравнения колебания струны и описывающее в двумерном случае колебания мембраны, а в трехмерном – распространение звуковых волн.

Обобщением рассмотренного ранее процесса электрических колебаний в проводах являются задача о распространении в пространстве электромагнитных волн. Это явление описывается уравнениями Максвелла, лежащими в основе математических моделей электродинамики.

Для приближенного решения уравнения теплопроводности в предшествующей лекции мы применяли метод конечных разностей. Заключительный раздел данной лекции посвящен изложения этого метода для уравнения колебания струны.

#### **1. Энергия колебания струны**

Процессы колебания маятника и пружины можно охарактеризовать и с помощью закона сохранения энергии, см. Глава 3. Определим энергию колебания струны. Она складывается из кинетической и потенциальной энергии. Кинетическая энергия струны зависит от скорости ее движения и равна

****

Учитывая, что масса однородной струны длиной Δ*x* равна *ρ*Δ*x*, получаем

****

Эта формула предполагает неизменность характеристик струны по ее длине. В действительности такое равенство может выполняться лишь на сколь угодно малом участке длины *dx*, что приводит нас к соотношению

****

Тогда кинетическая энергия струны длиной *L* равна интегралу

****

Если в фиксированный момент времени *t* струна имеет некоторый профиль *u*=*u*(*x*,*t*), то соответствующая потенциальная энергия с точностью до знака совпадает с работой, которую нужно совершить, чтобы вывести струну из положения равновесия при *t* = 0 в состояние *u*(*x*,*t*) за время *t*. Работа равна действующей силе, умноженной на пройденный путь, который, в свою очередь, равен произведению скорости на время движения. Если под действием силы *F* за время Δ*t* струна двигалась со скоростью *ut*, то при этом была выполнена работа

*A* = *Fut*Δ*t*.

Учитывая известное представление силы *F*, находим значение работы



Эта формула будет иметь смысл в том случае, когда она относится к сколь угодно малым интервалам *dx* и *dt*. При этом находим работу

*dA* = (*kux*)*xutdxdt*.

Тогда при перемещении струны длиной *L* за время *t* выполняется работа



Пользуясь формулой интегрирования по частям, находим



Предположим для простоты, что концы струны жестко закреплены. Тогда их скорость движения равна нулю, и из последней формулы получаем



Преобразуем подынтегральное выражение с помощью равенства



В результате заключаем, что работа, затраченная на вывод системы из положения равновесия в начальный момент времени в некоторое текущее состояние, равна



Учитывая, что при *t*=0 струна находилась в положении равновесия, установим, что *ux*(*x*,0)=0. Таким образом, потенциальная энергия, отличающаяся от работы только знаком, равна



В результате находим энергию колебания струны в произвольный момент времени

 (12.29)

Установим теперь связь между уравнением колебания струны и полученным выражением для ее энергии. Умножая уравнение колебания струны (12.3) на производную *ut* и интегрируя по длине струны, установим соотношение

 (12.30)

Преобразуем подынтегральное выражение в левой части равенства (12.30). Получаем



Выражение в правой части равенства (12.30) преобразуется с помощью формулы интегрирование по частям



В результате равенство (12.30) принимает вид

****

откуда следует соотношение

*E*(*t*) = const.

Полученный результат соответствует ***закону сохранения энергии***колебания струны.

Мы можем теперь дать интерпретацию результатов, представленных на Рис. 12.3 с позиций закона сохранения энергии. Имея соответствующее отклонение от положения равновесия, струна обладает определенной потенциальной энергией, действие которой всегда направлено в сторону равновесия. При этом кинетическая энергия отсутствует, поскольку струна покоится. За счет потенциальной энергии струна начинает двигаться в сторону равновесия. По мере ее приближения к равновесному состоянию уменьшается потенциальная энергия струны. Однако сам факт движения свидетельствует о появлении некоторой скорости, и значит, кинетической энергии. В соответствии с законом сохранения энергии полная механическая энергия системы не меняется. Таким образом, уменьшение потенциальной энергии сопровождается соответствующим увеличением ее кинетической энергии. Тем самым, приближаясь к положению равновесия, струна движется с положительным ускорением.

В момент времени *t***=***π*/2*a* струна достигает равновесного состояния. Это означает, что ее потенциальная энергия равна нулю. Тогда полная энергия струны совпадает с ее кинетической энергией, которая в данном случае достигает своего максимума. Это возможно, если скорость также оказывается максимальной по модулю. Отметим, однако, что в данном случае скорость струны является отрицательной. Имея достаточно большую кинетическую энергию, струна по инерции продолжает свое движение и начинает отклоняться от положения равновесия на Рис. 12.3 мы наблюдаем движение струны вниз). По мере отклонения струны от равновесного состояния появляется и возрастает потенциальная энергия, действие которой направлено в сторону равновесия, а значит, против движения. В результате движение струны замедляется, ее кинетическая энергия падает, а потенциальная – растет.

В момент времени *t***=***π***/***a* скорость струны достигает нулевого значения. При этом кинетическая энергия также равна нулю, а потенциальная достигает максимума. В результате струна начинает двигаться в противоположном направлении. При *t***=**3*π*/2*a* она достигает состояния равновесия, имея в этот момент времени максимальную скорость. Продолжая свое движение, по инерции, струна отклоняется от равновесия и в момент времени *t***=**2*π*/*a* достигает своего первоначального положения. Далее процесс колебания струны возобновляется. В соответствии с полученными результатами кинетическая и потенциальная энергии струны являются периодическими функциями времени с периодом *t* **=** 2*π*/*a*. Параметр *а* в данном случае определяет частоту колебания струны.

**Задание 12.3. Энергия колебания струны**. Рассматривается однородная струна на единичном отрезке с закрепленными концами, находящаяся изначально в положении равновесия и имеющая начальную скорость *ψ*(*x*)=sin2*πx*. Провести следующие действия.

1. Пользуясь методом разделения переменных, найти решение задачи.

2. Определить изменение со временем кинетической энергии струны и нарисовать соответствующий график.

3. Определить изменение со временем потенциальной энергии струны и нарисовать соответствующий график.

4. Убедиться в справедливости закона сохранения энергии.

#### **2. Волновое уравнение**

Уравнение колебания струны является естественным обобщением уравнения колебания пружины (материальной точки, т.е. нульмерного объекта) на случай распределенного одномерного объекта. Двумерный случай соответствует колебанию мембраны – некоторой плоской пленки. При этом функция состояния *u* **=** *u*(*x*,*y*,*t*) выражает отклонение мембраны в точке с координатами *x*, *y* от положения равновесия в момент времени *t*. Она характеризуется ***уравнением колебания мембраны***

*utt* = *a*2(*uxx* + *uyy*),

которое описывает, в частности, распространение волн на поверхности жидкости. Процесс распространения волн в пространстве связан с функцией четырех переменных   
*u* **=** *u*(*x*,*y*,*z*,*t*) и описывается соотношением

*utt* = *a*2(*uxx* + *uyy* + *uzz*),

называемым ***волновым уравнением***. В частности, оно лежит в основе математических моделей задач ***акустики***[[22]](#endnote-22).

Сумму вторых производных по пространственным переменным принято называть оператором Лапласа и обозначать через Δ. Тогда волновое уравнение записывается в виде[[23]](#endnote-23)

*utt* = *a*2Δ*u*. (12.31)

Отсюда в одномерном случае следует уравнение колебания струны, а в двумерном – уравнение колебания мембраны.

Сравнительная характеристика волновых процессов представлена в Таблице 12.3.

Таблица 12.3. Сравнительная характеристика волновых процессов.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **размерность** | **объект** | **уравнение** |
| 0 | пружина | *utt* = -*ω*2*u* |
| 1 | струна | *utt* = *a*2*uxx* |
| 2 | мембрана | *utt* = *a*2(*uxx* + *uyy*) |
| 3 | звуковая волна | *utt* = *a*2(*uxx* + *uyy* + *uzz*) |

#### **3. Колебания балки**

Чрезвычайно интересная математическая модель связана с процессом колебания упругой балки. Главное отличие колебания балки от рассмотренного ранее процесса продольных колебаний струны связано с тем, что балка оказывает сопротивление изгибу. Исходя из законов ***теории упругости***, можно показать, что малые свободные колебания упругой балки описываются ***уравнением колебания балки***[[24]](#endnote-24)



где *u = u*(*x,t*) – отклонение балки от состояния равновесия, *ρ* – ее плотность, *S* – площадь поперечного сечения, *E* – модуль Юнга, *J* – момент инерции сечения балки. Для однородной балки уравнение принимает вид

*utt* + *a*2*uxxхх* = 0,

где 

Обращаем внимание на то, что уравнение колебания балки имеет четвертый порядок по пространственной переменной. Таким образом, краевая задача для данного уравнения требует задания двух начальных и четырех граничных условий. Ситуация с начальными условиями достаточно ясна. Как и в случае струны, задается начальный профиль балки *ϕ* и ее начальная скорость *ψ*, что соответствует условиям

*u*(*x*,0) = *ϕ*(*x*), *ut*(*x*,0) = *ψ*(*x*).

Граничные условия могут быть определены различными способами.

Обычно задаются по два условия на каждом конце балки. В частности, если левый конец балки, соответствующей переменной *x*=0, жестко закреплен, то граничные условия принимают вид

*u*(0,*t*) = 0,  *uх*(0,*t*) = 0.

Если левый конец балки свободно опирается на некоторую опору, то получаются граничное условие

*u*(0,*t*) = 0,  *uхх*(0,*t*) = 0.

В случае свободного левого конца задаются условия

*uхх*(0,*t*) = 0, *uххх*(0,*t*) = 0.

Аналогичные условия могут быть заданы и на правом конце балки. При этом возможны различные сочетания граничных условий на левом и правом концах балки.

**Задание 12.4. Уравнение колебания балки**. Рассматриваются колебания однородной балки длиной *L*, концы которой свободно опираются на опоры. Начальное положение и начальная скорость балки известны. Провести следующий анализ.

1. Применить метод разделения переменных для уравнения колебания балки.

2. Провести исследование соответствующей задачи Штурма – Лиувилля.

3. Найти решение задачи в виде соответствующего ряда Фурье.

4. Найти решение задачи для балки длиной *π* с начальным профилем *ϕ*(*x*) = sin*x* и нулевой начальной скоростью.

5. Исследовать влияние параметра *a* на результаты.

6. Дать физическую интерпретацию полученным результатам.

#### **4. Уравнения Максвелла**

Ранее были рассмотрены электрические колебания в проводе. В более общем случае рассматриваются ***электромагнитные волны***[[25]](#endnote-25). ***Электромагнитное поле*** характеризуется четырьмя векторными функциями – ***напряженностями электрического поля*** **E**, ***напряженностью магнитного поля*** **H**, ***электрической индукцией*** **D** и ***магнитной индукцией*** **B**. Каждая из этих величин имеет по три компоненты.

В основе математических моделей электродинамики лежат ***уравнения Максвелла***, связывающие выше указанные величины. В их состав входит ***закон Гаусса***

div**D** *=* 4*πρ*,

согласно которому электрический заряд является источником электрической индукции. Здесь *ρ* представляет собой плотность заряда, а ***дивергенция*** div вектора **D**=(*D*1,*D*2,*D*3) характеризуется равенством[[26]](#endnote-26)



Далее следует ***закон Гаусса для магнитного поля***

div**B** *=* 0,

постулирующий отсутствие магнитных зарядов. ***Закон индукции Фарадея***

**

говорит о том, что изменение магнитной индукции порождает вихревое электрическое поле, где *c –* ***скорость света*** в вакууме, а ***ротор*** rot вектора **E**=(*E*1,*E*2,*E*3) характеризуется равенством

**

Наконец, соотношение

**

означает, что электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле, где **j** *–* ***плотность электрического тока***. Приведенные соотношения дополняются ***материальными уравнениями поля***

**D***=ε***E**, **B***=μ***H**,**j***=σ***E**, (12.32)

где *ε* – диэлектрическая постоянная, *μ* – магнитная проницаемость, *σ* – проводимость среды.

При определенных условиях уравнения Максвелла можно упростить[[27]](#endnote-27). В частности, в вакууме в отсутствии зарядов и токов при *ε* = 1, *μ* = 1 после исключения индукции электрического и магнитного полей с помощью равенств (12.34) получаем следующие соотношения

div**E** *=* 0, div**H** *=* 0, * * (12.33)

Действуя на третье равенство (12.33) оператором rot и учитывая возможность его перестановки с производной по времени, будем иметь

**  (12.34)

в силу четвертого равенства (12.33).

Можно показать, что для любой вектор функции *E* справедливо соотношение

rot rot **E** = ∇ div **E** *–* Δ**E**,

где ∇ – ***градиент***, т.е. вектор, компонентами которого являются частные производные по пространственным переменным, а Δ – оператор Лапласа, т.е. сумма производных второго порядка по пространственным переменным. Тогда, учитывая первое равенство (12.33), преобразуем соотношение (12.34) к следующему виду

**E***tt*= *c*2Δ**E**. (12.35)

Аналогичным образом из условий (12.33) выводится равенство

**H***tt*= *c*2Δ**H**. (12.36)

Отметим, что напряженности электрического и магнитного полей являются векторными величинами. Таким образом, при сделанных предположениях оказывается, что все компоненты напряженностей электрического и магнитного полей удовлетворяют волновому уравнению (12.31), причем в качестве параметра *a* здесь выступает скорость света. В Разделе 3 отмечалось, что коэффициент *a* ассоциируется со скоростью движения волны. Тем самым электромагнитные волны распространяются со скоростью света.

#### **5. Метод конечных разностей для уравнения колебания струны**

Как уже отмечалось, аналитическое решение дифференциальных уравнений может быть найдено лишь в исключительных случаях. В предшествующей лекции был описан метод конечных разностей для приближенного решения уравнения теплопроводности. Его можно использовать и для решения краевых задач для уравнения колебания струны[[28]](#endnote-28).

Рассматривается неоднородное уравнение колебания струны

*utt*(*x*,*t*) = *a*2*uxx*(*x*,*t*) + *f*(*x*,*t*), 0<*x*<*L*,0<*t*<*T* (12.37)

с начальными условиями

*u*(*x*,0) = *ϕ*(*x*), *ut*(*x*,0) = *ψ*(*x*), 0<*x*<*L* (12.38)

и граничными условиями

*u*(0,*t*) = *α*(*t*),  *u*(*L*,*t*) = *β*(*t*), *t* >0, (12.39)

где параметры *a* и *L* и функции *f*, *ϕ*, *ψ*, *α* и *β* известны.

Интервал [0,*T*] разбивается на части с шагом *τ* = *T*/*N* точками *tj =τj*, *j=*0,…,*N*, а интервал [0,*L*] – с шагом *h* = *L*/*M* точками *xi =hi*, *i=*0,…,*M*. Решение задачи ищется в узлах сетки (*xi*,*tj*). Входящие в уравнение (12.37) вторые производные аппроксимируются следующем образом





В результате получаем равенство



где . Отсюда находим

 (12.40)

Эта формула позволяет определить значения искомой функции на последующем временном слое при ее известном значении на двух предшествующих слоях. Все значения на нулевом слое по времени находятся из первого начального условия



где *ϕi =ϕ*(*xi*). Далее, заменив во втором условии (12.38) производную разностью, имеем



где *ψi =ψ*(*xi*). Теперь можно найти искомую функции следующем (втором) слое от первого до предпоследнего значения в соответствии с формулой (12.40). Ее граничные значения находятся по формулам



следующим из граничных условий (12.39),где *α j =α*(*tj*), *β j =β*(*tj*). Таким образом, находится приближенное решение задачи (12.37) – (12.39) во всех узлах сетки[[29]](#endnote-29).

**Задание 12.5. Метод конечных разностей для уравнения колебания струны**. Рассматривается краевая задача (12.37) – (12.39) на единичном отрезке при *a=*1.Провести следующий анализ.

1. Задать функцию *v*(*x*,*t*) = sin*πx* cos*πt* в качестве решения задачи. Выбирая в соотношениях (12.37) – (12.39) *u*(*x*,*t*)=*v*(*x*,*t*), найти соответствующие значения функций *f*, *ϕ*, *ψ*, *α* и *β*. Итак, при найденных значениях этих функций рассматриваемая краевая задача для уравнения колебания струны имеет именно это решение.

2. Провести решение задачи (12.37) – (12.39) с найденными на предшествующим пункте задания в соответствии с явной схемой разностной схемой.

3. Сравнить полученное приближенное решение с точным решением. Оценить изменение от слоя к слою по времени погрешности



где  – приближенное решение задачи, а *v* есть изначально заданная функция.

4. Исследовать влияние шагов сетки на точность решения задачи.

### **КОММЕНТАРИИ**

1. Уравнение колебания струны является одним из важнейших уравнений математической физики и рассматривается в рамках любого курса по уравнениям с частными производными, см., например, Farlow, Hor, Jost, Ladyz, Mikhlin, Pinch, Polyanin, Tihon, Vladim. [↑](#endnote-ref-1)
2. Телеграфное уравнение рассматривается, например, в Hayt, Riley, Sadiku. [↑](#endnote-ref-2)
3. Имеют смысл также продольные и крутильные колебания струны. В первом случае деформация проводится вдоль струны (сжатие и растяжение), а во втором – повороты вокруг оси *x*. В этих случаях также можно получить уравнение в форме (12.5). Вывод уравнения продольных колебаний струны приводится, например, в Tihon. [↑](#endnote-ref-3)
4. Уравнение колебания струны можно получить и на основе принципа наименьшего действия, см. Глава 16. [↑](#endnote-ref-4)
5. Мы уже пользовались понятием линейной плотности при определении уравнения теплопроводности. Использование линейной, а не обычной плотности (количество вещества в единице объема) объясняется тем, что в данной модели струна имеет лишь длину, но не объем. [↑](#endnote-ref-5)
6. В Приложении будет рассмотрен процесс колебания упругой балки, где указанное предположение будет снято. [↑](#endnote-ref-6)
7. Вспоминаем, что при выводе уравнения колебания маятника мы также сначала имели дело с синусом (нелинейной функцией), и лишь потом в предположении малости колебаний получили линейное уравнение. [↑](#endnote-ref-7)
8. При описании колебаний маятника или пружины мы также учитывали силы трения. В результате в соответствующих уравнениях появлялся дополнительный член, пропорциональный скорости, т.е. производной от отклонения. Для колебания струны также можно учесть трение. При этом в соответствующее уравнение также войдет слагаемое, пропорциональное производной по времени от отклонения струны от положения равновесия. При наличии внешней силы, действующей на струну, получается неоднородное уравнение колебания струны. [↑](#endnote-ref-8)
9. В главе 16 уравнение колебания струны будет получено на основе принципа наименьшего действия. [↑](#endnote-ref-9)
10. В Главе 10 мы уже проводили классификацию уравнения

    *a*11*uxx* + 2*a*12*uxy* + *a*22*uyy* = *F*(*x*,*y*,*u*,*ux*,*uy*),

    где *a*11, *a*12, *a*22 – заданные числа, *F* – известная функция своих аргументов. Определяющим здесь является знак дискриминанта

    *D* = *a*122 – *a*11*a*22.

    В частности, при *D*=0 это уравнение является параболическим, что характерно для уравнения теплопроводности. При *D*>0 рассматриваемое уравнение называется гиперболическим, а при *D*<0 –эллиптическим. Для уравнения колебания струны *utt*–*a*2*uxx=*0при *y=t* имеем *D*=*a*2. Следовательно, это уравнение является ***гиперболическим***. Можно показать, что с помощью специального преобразования независимых переменных  гиперболическое уравнение общего вида всегда можно привести к каноническому виду

    

    Именно с помощью такого преобразования решается рассматриваемая в Разделе 3 задача Коши для уравнения колебания струны. [↑](#endnote-ref-10)
11. Для уравнения теплопроводности условие по времени может быть задано только в начальный момент времени, а краевая задача с данными в конечный момент времени является некорректной. В то же время для уравнения колебания струны положение и скорость струны могут быть заданы как в начальный, так и в конечный момент времени. Тем самым по известным значениям положения струны и ее скорости в данный момент времени можно восстановить предысторию системы. Вследствие этого для описания процесса может быть определена динамическая группа преобразований, см. Глава 5. [↑](#endnote-ref-11)
12. Метод разделения переменных для уравнения колебания струны приводится, в книгах Farlow, Mikhlin, Tihon, Vladim. [↑](#endnote-ref-12)
13. Как и на аналогичном этапе исследования уравнения теплопроводности, здесь требуется обосновывать сходимость рассматриваемого ряда Фурье. Точно также нуждаются в строгом обосновании и все дальнейшие действия с бесконечными суммами. Однако, учитывая, что нас интересует свойства математических моделей, а не теория уравнений с частными производными, все соответствующие выкладки мы проводим формально. Обоснование соответствующих процедур можно найти в указанной ранее литературе. [↑](#endnote-ref-13)
14. Характерной особенностью уравнения теплопроводности является выход со временем ее решения в положение равновесия. В данном случае мы наблюдаем колебания вокруг равновесия. В частности, если задать нулевые значения положения и скорости струны, то со временем ее положение меняться не будет, т.е. мы действительно имеем дело с положением равновесия. Если же рассмотреть вынужденные колебания струны, добавив в правую часть уравнения выражение, не меняющееся со временем, то положением равновесия будет некоторый профиль струны, определяемый внешним воздействием. [↑](#endnote-ref-14)
15. Если воспользоваться методом разделения переменных для решения второй краевой задачи для уравнения колебания струны, то для соответствующей задачи Штурма–Лиувилля получаются краевые условия второго рода. Как было показано в Главе 10, это задача имеет соответствующие косинусы в качестве нетривиального решения. [↑](#endnote-ref-15)
16. Вынужденные колебания струны описываются неоднородным уравнением колебаний струны. Для решения такой задачи применяется описанный в Главе 10 метод Фурье. Соответствующее решение ищется в виде ряда Фурье по синусам, т.е. по решениям соответствующей задачи Штурма–Лиувилля. При этом коэффициенты Фурье определяются из решения задач Коши для неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В свою очередь, решение неоднородной краевой задачи для уравнением колебаний струны ищется в виде суммы двух функции, одна из которых выбирается изначально так, чтобы она удовлетворяла заданным граничным условиям. Вследствие этого вторая из функций будет удовлетворять однородным граничным условиям. [↑](#endnote-ref-16)
17. Здесь используется ***теорема о дифференцировании сложной функции***, см., например, Apostol. [↑](#endnote-ref-17)
18. Этот парадоксальный, на первый взгляд, результат не покажется столь удивительным, если вспомнить, что решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка находится с точностью до двух произвольных постоянных, т.е. величин, не зависящих от данного аргумента. В частности, решением уравнения *ut*(*x*,*t*)=0 будет не только любая константа, но и произвольная функция единственной переменной *х*. [↑](#endnote-ref-18)
19. При нахождении общего решения уравнения колебания струны мы пользовались достаточно распространенным приемом. Сначала выполняется такая замена переменных, при которых исследуемая задача принимает достаточно простой вид. Затем проводится решение задачи в новых переменных. Наконец, на последнем этапе осуществляется возвращение к исходным переменным. [↑](#endnote-ref-19)
20. Бегущие волны можно наблюдать на поверхности воды при падении в нее какого-либо тела (например, камня). Волны на поверхности воды характеризуются двумерным аналогом уравнения колебания струны, т.е. уравнением колебания мембраны. Однако если наблюдать за уровнем воды в вертикальной плоскости с началом координат, соответствующим точке падения тела в воду, то мы увидим бегущие волны, аналогичные изображенным на Рис. 12.5. [↑](#endnote-ref-20)
21. При выводе телеграфных уравнений не учитывалось магнитное поле. Полная математическая модель электродинамики включает в себя уравнения Максвелла относительно напряженности электрического и магнитного полей, см. Приложение. [↑](#endnote-ref-21)
22. Общие проблемы волновой физики рассматриваются, например, в Pain, Pierce, Crawford, а задачи  
    акустики – в Morse. Вывод уравнений акустики дается в Главе 14. Своеобразный волновой процесс связан с уравнением Шредингера, которое будет рассмотрено в Главе 15. [↑](#endnote-ref-22)
23. В Главе 13 будет рассматриваться также неоднородное волновое уравнение и связанные с ним установившиеся колебания. [↑](#endnote-ref-23)
24. С теорией упругости можно познакомиться в LandauLKP, Sadd. Вывод уравнения колебания балки приводится, например, в Tihon. Двумерный аналог данного уравнения, связанный с процессом колебания упругой пластины, рассматривается в Главе 13. Там же рассматривается задача определения формы изгиба упругой пластины под действием некоторой постоянной силы. [↑](#endnote-ref-24)
25. Задачи ***электродинамики*** рассматриваются, например, в LandauE, Purcell, Tamm, Tipler, см. также Gould, Oden. [↑](#endnote-ref-25)
26. Понятия градиента, ротора и дивергенции относятся к векторному анализу и более подробно рассматриваются в Главе 13. [↑](#endnote-ref-26)
27. В последующей лекции будут рассмотрены, в частности, задачи электростатики, где характеристики процесса не меняются со временем. [↑](#endnote-ref-27)
28. О методе конечных разностей см. Morton, Randall, Samarskii, Smith, Strikwerda, Thomas. [↑](#endnote-ref-28)
29. Мы использовали ***явную схему*** для уравнения колебания струны. Она является устойчивой при выполнении условия *aτ*≤*h.* Абсолютно устойчивой является соответствующая ***неявная схема***, в которой при аппроксимации второй производной по пространственной переменной значение функции берется на последующем шаге по времени. Для практического использования неявной схемы применяется описанный в Главе 11 метод прогонки. [↑](#endnote-ref-29)